Concours commun INA-ENSA

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION
(Option générale)

Durée : 3 heures

Notations valables pour tout le problème.

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On notera 0_E le vecteur nul de E, Id l'application identité de E et θ l'application qui à tout vecteur de E associe 0_E .
- ℓ est un endomorphisme de E, $\mathrm{Im}(\ell)$ désigne son image et $\mathrm{Ker}(\ell)$ son noyau.
- On pose $\ell^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $\ell^k = \ell \circ \ell^{k-1}$.

PARTIE A

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout endomorphisme ℓ de E, il existe un entier p *qui vérifie:*

$$(1) \quad \begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ E = \mathrm{Ker}(\ell^p) \oplus \mathrm{Im}(\ell^p) \end{cases}$$

(le symbole $\oplus$ signifie que la somme des sous-espaces vectoriels est directe).

1. Dans cette question, ℓ est un endomosphisme bijectif de E. Donner une valeur de p satisfaisant (1). Justifier la réponse.

2. Exemple 1.

Dans cette question, n=3 et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) et ℓ est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

2.a. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\ell)$ et une base de $\mathrm{Im}(\ell)$. Peut-on choisir p=1?

2.b. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\ell^2)$ et une base de $\mathrm{Im}(\ell^2)$.

Justifier l'égalité: $E = \mathrm{Ker}(\ell^2) \oplus \mathrm{Im}(\ell^2)$.

3. Exemple 2.

Dans cette question, n=4 et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3, e_4), m est un paramètre réel et ℓ est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.a. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\ell)$ et une base de $\mathrm{Im}(\ell)$. Peut-on choisir p=1? On discutera suivant les valeurs de m.

3.b. Déterminer le plus petit entier p vérifiant (1).

4. Etude du cas général.
Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme ℓ n'est pas bijectif.

4.a. Soit k un entier naturel ; justifier:
(i) $\mathrm{Ker}(\ell^k) \subset \mathrm{Ker}(\ell^{k+1})$
(ii) $\mathrm{Im}(\ell^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(\ell^k)$.

4.b. Pour tout entier naturel k, on note a_k la dimension de $\mathrm{Ker}(\ell^k)$. Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4.c. Soit F l'ensemble des entiers naturels k tels que $a_k = a_{k+1}$. Montrer que F est un ensemble non vide.

4.d. En déduire l'existence d'un entier p, supérieur ou égal à 1, qui vérifie les deux conditions:
- pour tout entier k vérifiant: $0 \le k \le p-1$, on a:
$$\mathrm{Ker}(\ell^k) \neq \mathrm{Ker}(\ell^{k+1});$$
- $\mathrm{Ker}(\ell^p) = \mathrm{Ker}(\ell^{p+1})$.

4.e. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à p, on a:
$$\mathrm{Ker}(\ell^k) = \mathrm{Ker}(\ell^p).$$

4.f. Déduire de ce qui précède l'égalité:
$$E = \mathrm{Ker}(\ell^p) \oplus \mathrm{Im}(\ell^p).$$

Dans toute la suite du problème, p *désigne le plus petit entier vérifiant* (1) *et on admet que c'est celui qui a été obtenu à la question* 4 *de la partie* A.

PARTIE B

Dans cette partie, on étudie deux cas particuliers.

1.a. On suppose p=n. Montrer que ℓ^n est l'endomorphisme nul. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\ell)$?

1.b. *Un exemple.*

Dans cette question, n=3 et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) et ℓ est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que:

$$\ell(\varepsilon_1) = 0_E, \quad \ell(\varepsilon_2) = \varepsilon_1, \quad \ell(\varepsilon_3) = \varepsilon_2.$$

Écrire la matrice de ℓ dans cette base et vérifier que p=3.

2. On suppose ici que p est supérieur ou égal à 2 et que l'on a de plus: $\mathrm{Ker}(\ell^p) = E$.

2.a. Montrer que pour tout entier k vérifiant: $0 \leq k \leq p-1$, on peut définir un sous-espace vectoriel, non réduit au vecteur nul, supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\ell^k)$ dans $\mathrm{Ker}(\ell^{k+1})$.

2.b. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle ℓ est représenté par une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes de la diagonale sont nuls.

2.c. On reprend l'exemple 2 de la partie A avec m=0. Déterminer, par permutation des vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4, une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A_0 a les propriétés définies à la question 2.b.

PARTIE C

Le but de cette partie est la détermination de p *lorsque* f *vérifie une certaine relation polynomiale.*

a désigne un réel non nul et f est un endomorphisme de E qui vérifie:

$$(2)\quad \begin{cases} f \neq a\mathrm{Id} \\ f^{n-1} \neq 0 \\ f^{n-1} \circ (f - a\mathrm{Id}) = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N},\ (\ 0 \leq k \leq n-2\ ) \Rightarrow f^{k} \circ (f - a\mathrm{Id}) \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que 0 et a sont des valeurs propres de f et que ce sont les seules.

2.a. Montrer que pour tout entier naturel k, on a:

$$\mathrm{Ker}(f^{k}) \cap \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}) = \{0_E\}.$$

2.b. En déduire que $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$ et $\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E. (On pourra considérer leurs dimensions et utiliser l'égalité $f^{n-1} \circ (f - a\mathrm{Id}) = 0$.)

3. On se propose ici de démontrer l'égalité: $p = n-1$.

3.a. Supposant vérifiée l'hypothèse: $p < n-1$, justifier qu'alors $\mathrm{Ker}(f^{p})$ et $\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E. En déduire une contradiction avec (2).

3.b. Montrer que p ne peut pas être égal à n et conclure.